Dimostrare che il seguente linguaggio

$$L = \{ a^k b^r \mid k > 0, \ r > k^2 \}$$

non è libero

$$L = \{ \underbrace{a^2 b^3}_{5}, \ \underbrace{a b^2}_{3}, \ \underbrace{a b^3}_{4}, \dots \}$$

Supponiamo L libero da contesto.

<ENUNCIATO PUMPING LEMMA>

$$z = a^p b^{(p+1)^2}$$

$$\downarrow$$

$$z = a^p b^{p^2+1} \qquad |z| = p + p^2 + 1 > p \ \checkmark$$

(1) $|vwx| \leq p$

(2) $vx \neq \lambda$

(3) $uv^iwx^iy \in L \quad \forall i \geq 0$

Sottocasi

(1) $vwx = a^n \qquad 1 \leq \underline{n \leq p}$

(2) $vwx = b^n \qquad 1 \leq n \leq p$

(2) $vwx = b^{s}$ $\quad 1 \le s \le p$

(3) $vwx = a^t b^s \quad 1 \le t+s \le p$

• (1) $uv^2wx^2y = \underline{a^{p+n'} b^{p^2+1}} \qquad 1 \le n' \le n \le p$

$$\underset{p+\min(n')}{p+1} \le \#a \le \underset{p+\max(n')}{p+p = 2p}$$

vincolo : $\#b > (\#a)^2$

$$\#b = p^2+1$$

$$(\#a)^2 = (p+1)^2$$

$$p^2+1 \overset{?}{>} (p+1)^2$$

$$p^2+1 < p^2+2p+1$$

$$uv^2wx^2y \notin L$$

(2) $uv^0wx^0y = a^p b^{p^2+1-n'} \qquad 1 \le n' \le n \le p$

$$p^2+1-\max(n') \le \#b \le p^2+1-\min(n')$$

$$p^2+1-p \le \#b \le p^2+1-1$$

$$p^2+1-p \le \underbrace{\#b \le p^2} \leftarrow$$ non rispetta il vincolo

$$\#b < (\#a)^2$$

$\# b \leq (\# a)$

$uv^0wx^0y \notin L$

$(3) \quad vwx = a^t b^s \quad 1 \leq t+s \leq p$

$vx \neq \lambda$ per il Pumping Lemma

$(3.1) \quad v \neq \lambda \quad x = \lambda \quad \longrightarrow \quad vwx = a^{t'}$ uguale a (1)

$(3.2) \quad v = \lambda \quad x \neq \lambda \quad \longrightarrow \quad vwx = b^{s'}$ uguale a (2)

$(3.3) \quad v \neq \lambda \quad x \neq \lambda \qquad uv^2wx^2y$

$z = a^p b^{p^2+1} \iff z = uvwxy$

$$
\begin{aligned}
|uv^2wx^2y| &= |uvwxy| + |vx| \\
&= |z| + |vx| \\
&\leq \underset{\parallel}{|z|} + \underset{\parallel}{|vwx|} \qquad \underline{|vwx| \leq p} \\
&\leq p+p^2+1 + p = p^2+2p+1 \\
&= \underline{(p+1)^2}
\end{aligned}
$$

$|z| = p+p^2+1$

$\|\text{successivo}(z)\| = (p+1)+(p+1)^2+1$

$(p+1)^2 \overset{?}{\lesseqgtr} (p+1)+(p+1)^2+1$

$|uv^2wx^2y|$: $|\text{successivo}(2)|$

$$\Big|\ (p+1)^2 < (p+1)+(p+1)^2+1$$

$\Rightarrow uv^2wx^2y \notin L$

$\Rightarrow$ In tutti i casi la (3) del Pumping Lemma è violata $\Rightarrow$ Contraddizione

$$uv^0wx^0y = a^{p-t'}b^{p^2+1-s'} \quad 2 \leq t'+s' \leq t+s \leq p$$

$$p-p+1 \leq \#a \leq p-1$$

$$p^2+1-p+1 \leq \#b \leq p^2+1-1$$

$$1 \leq \#a \leq p-1$$

$$p^2-p+2 \leq \#b \leq p^2$$

vincolo:

$$\#b = (\#a)^2$$

$$L = \{\, w \in X^* \mid w = a^i b^j \mid j \geq 3i,\ i>0 \,\}$$

Stabilire se è libero da contesto

parole con $\#b = 3 \cdot \#a$

$$G: \begin{cases} S \to aSbbb \mid aT \\ T \to bbb \mid bT \end{cases}$$

$$S \to AB$$
$$A \to aAbbb \mid abbb$$
$$B \to bB \mid \lambda$$

$$L = \{ a^i b^{3i} \cdot b^k \mid k \geq 0 \ , \ i > 0 \}$$

1) $L(G) \subseteq L$ → ogni stringa generata da G appartiene a L

2) $L \subseteq L(G)$ → ogni stringa di L è generabile da G

1) $L(G) \subseteq L$ Induzione sul numero di passi di derivazione

2) $L \subseteq L(G)$ Induzione sulla lunghezza della stringa

1) $L(G) \subseteq L$

$$\boxed{\begin{array}{l} S \to aSbbb \mid aT \\ T \to bbb \mid bT \end{array}}$$

Sia n il numero di passi di derivazione

Induzione : – passo base
– passo induttivo

Passo base : $n = 1$

$T \to \underline{bbb}$, ma T non è il NT di partenza

$n = 2$

$S \to aT$ $\qquad aT$

$T \to bbb$ $\qquad w = abbb \in L$ ✓

Passo induttivo : assumiamo $S \overset{n \text{ passi}}{\Longrightarrow} w'$ che rispetta i vincoli '$a^i b^r$, $r \geq 3i$'

$S \overset{n+1 \text{ passi}}{\Longrightarrow} w$, $w \in L$?

Per fare $n+1$ passi, l'n-esimo passo (il penultimo) non deve essere una stringa (= deve avere almeno un NT).

	passo n		passo $n+1$	
1-	$S \to aT$	$\Rightarrow$	$T \to bbb$	$= abbb$
2-	$T \to bT$	$\Rightarrow$	$T \to bbb$	$= bbbb$

1- $S \overset{n \text{ passi}}{\Longrightarrow} w'$ valido per assunzione

$S \overset{n+1 \text{ passi}}{\Longrightarrow} w$ rispetta i vincoli

2 - $S \overset{n \text{ passi}}{\Rightarrow} w'$ valido per assunzione

$S \overset{n+1 \text{ passi}}{\Rightarrow} w$ rispetta i vincoli

$L(G) \subseteq L$ ✓

2) $L \subseteq L(G)$ induzione sulla lunghezza delle stringhe n

Induzione : - passo base
- passo induttivo

- passo base : $n = 4$ abbb

La stringa minima è $w = abbb$.

Applicando prima $S \to aT$ e poi $T \to bbb$, produciamo abbb.

- passo induttivo : assumo che le stringhe di lunghezza n siano derivabili partendo da S.

$a^i b^r$ $r \geq 3i$ $\begin{cases} abbb & abbbb \\ aabbbbbb & aabbbbbbb \end{cases}$

Quali sono le possibili successive in lunghezza?

① $a^i b^{J+1}$ < PROD >

② $a^{i+1} b^J$ $J' \geq 3(i+1)$

↳ Verifichiamo $w = a^{i+1} b^J$, $J \geq 3(i+1)$

Per ipotesi induttiva, con G posso produrre $a^i b^{j'}$, $j' \geq 3i$, per produrre $a^{i+1} b^j$, $j \geq 3(i+1)$:

$$S \to aT \Rightarrow T \to bbb \quad \checkmark$$

$L \subseteq L(G)$ ✓

$z = a^p b^p c^p$

$$vwx = a^{t'} b^{s'} \qquad 1 \leq t'+s' \leq t+s \leq p$$

$$uv^2wx^2y = a^{p+t'} b^{p+s'} c^p$$

$$|uv^2wx^2y| = |z| + |vx|$$

$$\leq |z| + |vwx| \qquad |vwx| \leq p$$

$$\leq |z| + p$$

$$= 3p + p = 4p$$

$$|\text{Successivo}(z)| = p+1+p+1+p+1$$

$$= 3p+3$$

$$4p \overset{\leq}{\underset{?}{\geq}} 3p+3 \quad \forall p$$

$p = 1 \qquad 4 < 6$

$p = 2 \qquad 8 < 9$

$p = 3 \quad 12 = 12 \quad \Rightarrow$ con $p = 3$

$uv^2wx^2y \in L$