$G:$ $A \to cAd \mid cd$ $\quad \Sigma = \{a, b, c, d\}$

$S \to aAb$

CFL

$A \to cAd$
$A \to cd$

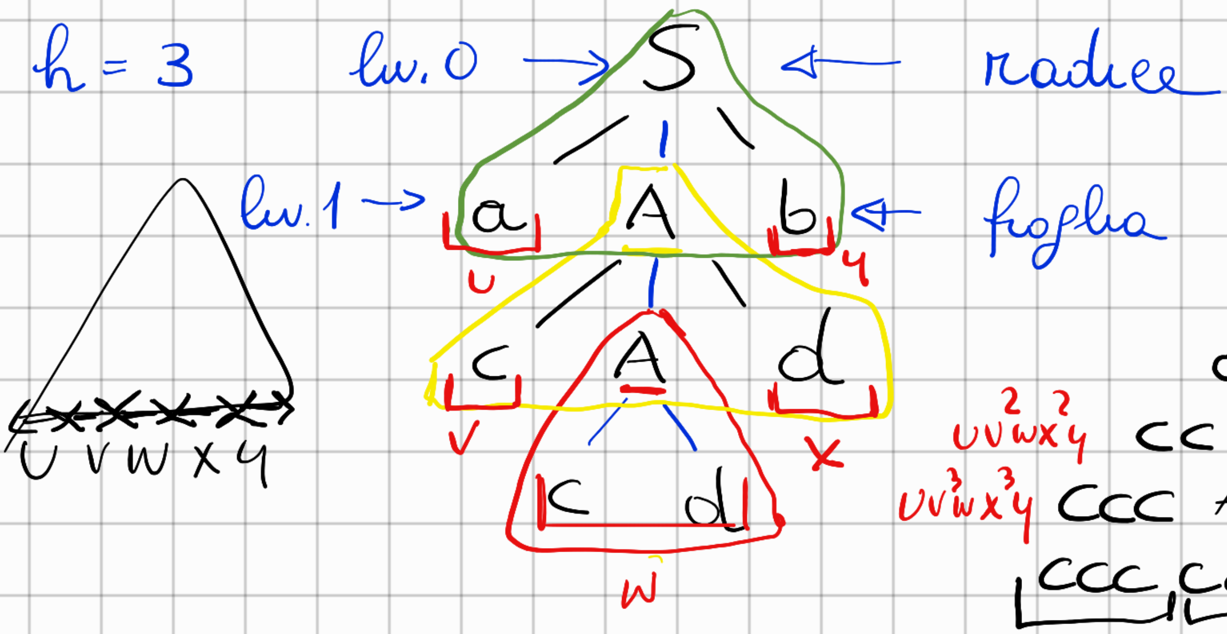
<u>accddb</u>

(1) $S \to aAb$ $\quad aAb$

(2) $A \to cAd$ $\quad acAdb$

(3) $A \to cd$ $\quad accddb$

$h = 3$



$A \to cAd$
$A \to cd$

cAd

$uv^2wx^2y \quad ccAdd$

$uv^3wx^3y \quad cccAddd$

$\underbrace{ccc}_{v},\underbrace{cd}_{w},\underbrace{ddd}_{x}$

$A \to cd$

$uv^1wx^1y = accddb$

$x^0 = \lambda$

$x^1 = x$

$x^2 = xx$

$\vdots$

$x^m = \underbrace{x \ldots x}_{m \text{ volte}}$

$$\{ uv^m w x^m y \mid m \geq 0 \}$$

$m = 0, 1, 2, \ldots$

$$|uv^2wx^2y| = |uvwxy| + |vx|$$

Pumping Lemma – Enunciato

Sia L un linguaggio libero da contesto. Allora esiste una costante p, che dipende solo da L, tale che se $z \in L$ e $\boxed{|z| > p}$, allora z può essere scritta come $uvwxy$ in modo tale che

(1) $|vwx| \leq p$

(2) $vx \neq \lambda$ $\rightarrow$ Se $v = \lambda$, allora $x \neq \lambda$; Se $x = \lambda$, allora $v \neq \lambda$; oppure $v \neq \lambda$, $x \neq \lambda$

(3) $\forall i,\ i \geq 0 : uv^i w x^i y \in L$

$a^n b^m c^n$ $n=1$

$\underbrace{a \dots a}_{p \text{ volte}} \; \overbrace{\underbrace{a}_{v} \underbrace{b \dots b}_{w} \underbrace{c}_{x}}^{1 \; p \; 1} \; \underbrace{c \dots c}_{p \text{ volte}}$ ($b \dots b$: p volte)

$|vwx| = p+2 > p$

Dim. per assurdo

Se voglio dimostrare che L non è CF, assumo L CF e punto a una contraddizione.

Esercizio 1

$L = \{ a^n b^n c^n \mid n > 0 \}$

Determinare se L è libero da contesto

$$= \{ a^1 b^1 c^1 ,\ a^2 b^2 c^2 ,\ \ldots \}$$

$$|L| = 3n$$

Assumiamo che L sia un linguaggio libero da contesto. Allora vale il Pumping Lemma

< ENUNCIATO PUMPING LEMMA >

$a^2 b^6 c^7 \quad a^3 b^2 c^2$

Sia $z = |\underline{a^p b^p c^p}| \qquad |z| > p$

$$|z| = p + p + p = 3p > p$$

allora $z = u\underbrace{vwx}y$ $\qquad \rightarrow \boxed{|vwx| \leq p}$

Sottocasi

1. $vwx = a^k \qquad 1 \leq k \leq p \rightarrow$ $u = a \ldots a$, $vwx = a \ldots a$, $y = b^p c^p$
2. $vwx = b^k \qquad 1 \leq k \leq p \rightarrow$ $u = a \ldots a b$, $vwx = b \ldots b$, $y = b \ldots b c \ldots c$
3. $vwx = c^k \qquad 1 \leq k \leq p$
4. $vwx = a^t b^s \qquad 1 \leq t+s \leq p$
5. $vwx = b^t c^s \qquad 1 \leq t+s \leq p$

$vwx = a^t b^s c^j$?

$a\, b \ldots b\, c \qquad |vwx| > p \quad X$

$\# b = p$

$u v^2 w x^2 y$

obiettivo : [illegible]

computare

↓ la (3) del PL

$vwx = aa\,|\,a\,a\,|\,aa$ (v, w, x)

(1) $\underbrace{vwx} = a^k \quad 1 \le k \le p$

$u\underbrace{v}^2 w \underbrace{x}^2 y = a^{p+k'} b^{p} c^{p} \qquad 1 \le k' \le k \le p$

$\min(k') = 1$

$\max(k') = p$

$p + \underbrace{1}_{\min(k')} \le \#a \le p + \underbrace{p}_{\max(k')}$

$p + 1 \le \#a \le 2p$

$\#b = p \quad \#c = p$

vincolo: $\#a = \#b = \#c$

ma $\#a \ne \#b$ in uv^2wx^2y

Quindi $uv^2wx^2y \notin L$ ←

(2) e (3) uguali (per esercizio)

(4) $vwx = a^t b^s \quad 1 \le t+s \le p$

$vx \ne \lambda$

$v = a \dots a \qquad v = \lambda$ ←

$w = b \dots b \qquad w = a \dots a$

→ $x = \lambda \qquad x = b \dots b$

$v = a \dots a \qquad v = a^t \quad v = a \dots a$

$w = b \dots b \qquad w = \lambda$

$x = b \dots b \qquad x = b^s \quad x = b \dots b$

(4.1) $v = \lambda \quad x \ne \lambda$ ← $\quad x = a^{t'} b^s$?

→ (4.2) $v \ne \lambda \quad x = \lambda$

(4.3) $v \ne \lambda \quad x \ne \lambda$

$x^2 = \underline{a^{t'} b^s}\, a^{t'} b^s$

$v = a^{t'} b^{s}$?

$v^2 = a^{t'} b^{s} a^{t'} b^{s}$

$(a^t b^s)^2 = a^t b^s \cdot a^t b^s$

(4.1) $vwx = b^{s'}$ uguale al (2)

(4.2) $vwx = a^{t'}$ uguale a (1)

(4.3) $vwx = a^{t'} b^{s'}$ $\quad 1 \leq t' + s' \leq t + s \leq p$

$t' \geq 1$

$s' \geq 1$

$|vwx| \leq p$

$$uv^2wx^2y = a^{p+t'} b^{p+s'} c^p$$

$$p+1 \leq \#a \leq p + \underline{(p-1)}$$

$$p+1 \leq \#b \leq p + \underline{(p-1)}$$

$$\#c = p$$

$L = \{ b^{2^n} \mid n > 0 \}$

$\neq \{ b^{2n} \mid n > 0 \}$

Alfabeto $= \{ b \}$

$|$Alfabeto$| = 1$

Lavoriamo sulla lunghezza

$$(uvwxy) \xrightarrow{\text{successivo}} (uv^2wx^2y) \xrightarrow{\text{succ}} (uv^3wx^3y)$$

$$\begin{cases} z = b^{2^p} \\ z = uvwxy \end{cases}$$

$|z| = 2^p > p$

successivo $(z) = uv^2wx^2y$

$\rightarrow \underline{2^{p+1}} = 2^p \cdot 2^1$
$= 2^p \cdot 2$

$vx \neq \lambda$ (1)
$|vwx| \leq p$ (2)

$$|uv^2wx^2y| = \underbrace{|uvwxy|}_{2^p} + \underbrace{|vx|}_{\leq p}$$

$$\boxed{2^p + 1 \leq} \; |\text{successivo}(z)| \leq 2^p + p$$

uv^2wx^2y

lunga massimo questo

$$2^p + p < \underline{2^p \cdot 2}$$

lunghezza reale della successiva in L

quindi $uv^2wx^2y \notin L$